6/3/2018.

Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Θεώρημα: Αν $a_k \geq 0$ $\forall k$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ανν η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη.
Αν η σειρά αποκλίνει τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$

Απόδειξη
Εφόσον $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της (a_k) είναι αύξουσα. Αν επιπλέον είναι φραγμένη τότε είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αν η (s_n) δεν είναι φραγμένη τότε $s_n \to +\infty$, δηλ. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$

Παράδειγμα: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$
Απόδειξη:
Είχαμε δείξει ότι $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall n$ (1)
Θα δείξω με επαγωγή ότι $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
→ Για $n=1$ γράφεται: $s_{2^1} \geq 1 + \frac{1}{2}$ που ισχύει (ως ισότητα)
→ Υποθέτω ότι ισχύει για n: $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$
→ Δείχνω για $n+1$: $s_{2^{n+1}} \geq s_{2^{n+1}} - s_{2^n} + s_{2^n}$

$$\overset{(1)}{\geq} \frac{1}{2} + s_{2^n} \geq \frac{1}{2} + 1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

Εφόσον $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Προκύπτει ότι $s_{2^n} \to +\infty$
Εφόσον (s_n) είναι αύξουσα και έχει μια υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$ συμπεραίνουμε ότι $s_n \to +\infty$, δηλ. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

Θεώρημα (κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy): Έστω $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ και $a_{k+1} \leq a_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν η σειρά $\sum 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.

Απόδειξη Θέτουμε $s_n = a_1 + \dots + a_n$ και $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$ τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει, τότε $\exists M>0$ ώστε $t_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}$. Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει μη-αρνητικούς όρους αρκεί να δείξω ότι η (s_n) είναι φραγμένη.

Έστω $m \in \mathbb{N}$, τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ ώστε: $2^n \le m \le 2^{n+1}$

$$s_m = a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n - 1}) + (a_{2^n} + \dots + a_m)$$

$$\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} = t_n \le M$$

Επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα

Αντίστροφα

Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε $\exists M>0$ ώστε $s_n \le M \ \forall n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$: $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + a_{2^n} 2^n \le$

$\le 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \dots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) = 2 s_{2^n} \le 2M$

Εφόσον η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ έχει μη αρνητικούς όρους και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη. Η σειρά είναι συγκλίνουσα.

Θεώρημα (κριτήριο σύγκρισης). Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες. Αν $\exists M>0$ ώστε $0 \le a_k \le M b_k, \forall k \in \mathbb{N}$

α) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ είναι συγκλίνουσα, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα

β) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει

Απόδειξη

Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ $\forall n$, οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των δύο σειρών.

α) Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ είναι συγκλίνουσα $\exists \theta > 0 : t_n \le \theta \ \forall n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} M b_k = M \sum_{k=1}^{n} b_k = M \cdot t_n \le M \cdot \theta \ \forall n$

Εφόσον $a_k \ge 0 \ \forall k$ και s_n άνω φραγμένη η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

β) Με επαγωγή σε άτοπο. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ άτοπο.

Πρόταση (οριακό κριτήριο σύγκρισης):
Αν $a_k > 0$, $b_k > 0$ $\forall k$ ώστε $\lim_k \frac{a_k}{b_k} = l > 0$, $l \in \mathbb{R}$

τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει ανν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει

Απόδειξη:
Εφόσον $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, είναι φραγμένη δηλ. $\exists M_1 > 0$ ώστε $\frac{a_k}{b_k} \le M_1$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le a_k \le M_1 b_k$

Ομοίως $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{l}$ άρα $\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ φραγμένη άρα

$\exists M_2 > 0 : \frac{b_k}{a_k} \le M_2$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow b_k \le M_2 a_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη πρόταση.

Παραδείγματα:

α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει?

Είχαμε δει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ συγκλίνει

Εφόσον $\frac{1}{k^2} \le 2 \cdot \frac{1}{k(k+1)}$ $\left(\begin{array}{l} (\Leftrightarrow)\ k(k+1) \le 2k^2\ (\Leftrightarrow) \\ (\Leftrightarrow)\ k+1 \le 2k\ (\Leftrightarrow) \\ (\Leftrightarrow)\ 1 \le k \text{ Παν ισχύει } \forall k \end{array} \right)$

Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει?, $p > 2$

$0 \le \frac{1}{k^p} \le \frac{1}{k^2}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (εφόσον $p > 2$)

Άρα από το κριτήριο σύγκρισης, εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $0<p\leq 1$ συγκλίνει?

Αν $p\leq 1$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ αποκλίνει. Έχουμε δει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, εφόσον $0<\frac{1}{k}<\frac{1}{k^p}$ $\forall k$, η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ αποκλίνει.

Με τον παραπάνω τρόπο δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$, αν $1<p<2$

Θα δείξω χρησιμοποιώντας το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow p>1$

- Αν $p\leq 0$ $\frac{1}{k^p} \not\to 0$ Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ αποκλίνει
- Έστω $p>0$. Εφόσον $\frac{1}{k^p}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p}$. Από κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy:

$2^k\cdot\frac{1}{(2^k)^p} = 2^{k-kp} = (2^{1-p})^k$. Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}(2^{1-p})^k$ είναι γεωμετρική με λόγο 2^{1-p}. Η σειρά συγκλίνει ανν

$2^{1-p}<1 \Leftrightarrow 2^{1-p}<2^0$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} 1-p<0 \Leftrightarrow p>1$

($*$ συνάρτ. $x\mapsto 2^x$ είναι γν. αύξ.)

Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ συγκλίνει για τα $p>1$

Αποκλίνει για $p\leq 1$

(ε) Να εξεταστεί για ποια $p>0$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\log k)^p}$

Θέτουμε $a_k = \frac{1}{k(\log k)^p}$, $\lim a_k = 0$ και η a_k φθίνουσα με $a_k>0$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k(\log 2^k)^p}$ συγκλίνουσα

$\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνουσα $\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^p} \cdot \frac{1}{k^p}$ $\Leftrightarrow p>1$

Ορισμός Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ λέγεται απολύτως συγκλίνουσα όταν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ είναι συγκλίνουσα. Όταν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, αλλά δεν είναι απολύτως συγκλίνουσα λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Πρόταση Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα.

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy.

Έστω $\epsilon>0$. Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνουσα, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall m>n \geq n_0$ να ισχύει $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$, $\forall m>n\geq n_0$

$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon$

Από το κριτήριο του Cauchy η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Παραδείγματα:

α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{3/2}}$ συγκλίνει?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k^{3/2}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$ συγκλίνουσα εφόσον $\frac{3}{2}>1$.

Έτσι η σειρά $\sum \frac{(-1)^k}{k^{3/2}}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα, άρα συγκλίνουσα

β) Υπάρχουν σειρές που είναι συγκλίνουσες, αλλά όχι απολύτως.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, η σειρά αυτή δεν είναι απολύτως συγκλίνουσα αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Θα δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει. Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) =$

$= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n)}$

Παρατηρώ ότι η $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, εφόσον

$S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$ και

συγκλίνουσα

$S_{2n} \le \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \le \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Έτσι η S_{2n} αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνουσα

δηλ. $\exists s \in \mathbb{R}: S_{2n} \to s$

$S_{2n-1} = S_{2n} + \frac{1}{2n} \to s+0 = s$

Εφόσον $\left.\begin{matrix} S_{2n-1} \to s \\ S_{2n} \to s \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ η S_n συγκλίνουσα

γ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+3)}{k^2}$ συγκλίνει κ' απόλυτα συγκλίνει?

Εφόσον $\left|\frac{\sin(2k+3)}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει,

συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+3)}{k^2}$ απόλυτα, άρα

είναι συγκλίνουσα

δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+3k^2+1}{k^5+k^4+7}$

Θέτουμε $a_k = \frac{k^3+3k^2+1}{k^5+k^4+7}$ και $b_k = \frac{1}{k^2}$

$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^5+3k^4+k^2}{k^5+k^4+7} = \frac{1+3\cdot\frac{1}{k}+\frac{1}{k^3}}{1+\frac{1}{k}+7\cdot\frac{1}{k^5}} \to 1$

Εφόσον η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης

συγκλίνει και η $\sum a_k$

Θεώρημα (Κριτήριο λόγου ή D'Alembert)

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ μία σειρά με μη μηδενικούς όρους ώστε να υπάρχει το όριο $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell$ $(0 \le \ell \le +\infty)$

a) αν $\ell < 1$, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

b) αν $\ell > 1$, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

a) $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to \ell < 1$. Επιλέγω x με $\ell < x < 1$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας για $\varepsilon = x - \ell > 0$, συμπεραίνουμε ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall k \ge n_0$

$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < x$: $|a_{n_0+1}| < x|a_{n_0}|$

$|a_{n_0+2}| < x|a_{n_0+1}| < x^2|a_{n_0}|$

$\vdots$

$|a_{n_0+m}| < x^m|a_{n_0}|$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι $|a_k| \le x^{k-n_0}|a_{n_0}|$, $\forall k \ge n_0$

δηλαδή $|a_k| \le x^k \left(\frac{|a_{n_0}|}{x^{n_0}}\right)$ $\forall k \ge n_0$.

Θέτω $M = \frac{|a_{n_0}|}{x^{n_0}}$

Η σειρά $\sum_{k=n_0}^{\infty} x^k$ συγκλίνει (είναι γεωμετρική σειρά, έχοντας αφαιρέσει τους πρώτους όρους)

Εφόσον $|a_k| \le x^k \cdot M$ $\forall k \ge n_0$, η $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει άρα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Σημείωση: Αν $\ell = 1$ δεν εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου και πρέπει να εξετάσουμε με άλλο τρόπο τη σύγκλιση-απόκλιση της σειράς.